# Tutorato di Algebra Lineare
## Esercizi su sottospazi e applicazioni lineari

CdL in Informatica - Università di Pisa

13 Marzo 2025

**Esercizio 1.** Sia $W_1$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito da $W_1 = \mathrm{span}(v_1, v_2)$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

e sia $W_2$ il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ definito dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Determinare una base di $W_1 \cap W_2$ e di $W_1 + W_2$.

**Esercizio 2.** Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Siano $f$ e $g$ due endomorfismi[1] di $V$ tali che

$$\mathrm{im}(f) + \mathrm{im}(g) = \ker(f) + \ker(g) = V.$$

Mostrare che $\ker(f) \cap \ker(g) = \mathrm{im}(f) \cap \mathrm{im}(g) = \{0\}$.

**Esercizio 3.** Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sulla base canonica di $\mathbb{R}^3$ da

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare una base di $\ker f$.
2. Determinare una base di $\mathrm{im}\, f$.
3. Verificare che $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus \mathrm{im}\, f$. [2]

[1] Un *endomorfismo* di $V$ è un'applicazione lineare $F \colon V \to V$.

[2] Diciamo che uno spazio vettoriale $V$ si decompone in *somma diretta* di due sottospazi vettoriali $W_1$ e $W_2$ (e scriviamo $V = W_1 \oplus W_2$) se $V = W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

**Esercizio 4.** Sia $A$ la matrice in $M(3,\mathbb{R})$ data da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare una base di $\ker A$. [3]
2. Verificare che $\operatorname{im} A \subseteq \ker A$.
3. Consideriamo un intero $n \geq 2$. Chi è la matrice $A^n$?

**Nota.** Il prossimo esercizio è facoltativo (o meglio, è più facoltativo degli altri!) e richiede delle conoscenze di base del corso di Analisi Matematica.

**Esercizio 5** ($\star$ Algebra lineare e un po' di analisi)**.** Consideriamo gli insiemi

$$C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$$
$$C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabile, } f' \text{ continua}\}$$

dove $f'$ denota la funzione derivata di $f$.

1. Verificare che l'insieme $C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, munito delle usuali operazioni di somma e prodotto per scalare, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e che $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è un suo sottospazio.
2. Mostrare che le funzioni $\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}$ in $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sono linearmente indipendenti.
3. Dato un intero positivo $n$, mostrare che le funzioni $1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \ldots, \mathrm{e}^{nx}$ sono linearmente indipendenti (qui 1 indica la funzione costante $1(x) = 1$).
   [Suggerimento: posto $t = t(x) = \mathrm{e}^x$, si ha $\mathrm{e}^{kx} = t^k$. Cosa significa che una combinazione lineare di $1, t, \ldots, t^n$ (con coefficienti reali fissati!) è uguale alla funzione nulla?]

Consideriamo l'operatore di derivata

$$\begin{array}{cccccc} D & : & C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & & f & \longmapsto & f' \end{array}$$

Ricordiamo che $D$ è un'applicazione lineare e che $D(\mathrm{e}^{ax}) = a\mathrm{e}^{ax}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. In particolare, l'applicazione $D$ si restringe a un endomorfismo del sottospazio $V = \operatorname{span}(1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \ldots, \mathrm{e}^{nx})$ di $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

4. Determinare nucleo e immagine della mappa $D\colon V \to V$ e scrivere la matrice associata a $D$ nella base $1, \mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \ldots, \mathrm{e}^{nx}$ di $V$.
5. (**Extra tutorato.**[4]) Consideriamo ora $W = \operatorname{span}(\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \ldots, \mathrm{e}^{nx}) \subseteq V$ e consideriamo l'endomorfismo di $W$ ottenuto restringendo $D$ a $W$. Questo endomorfismo è un isomorfismo? Nel caso, determinare l'inversa.

---

[3] Ricordiamo che $\ker A$ denota $\ker L_A$, dove $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'applicazione lineare associata alla matrice $A$. Analogamente $\operatorname{im} A$ denota $\operatorname{im} L_A$.

[4] Ho deciso di aggiungere questa domanda dopo la discussione avvenuta post tutorato.